Wirtschaftswissenschaftliche Methoden: Formale Grundlagen

Termin 6

Jakob Kapeller

University of Duisburg-Essen
Institute for Socio-Economics &

Johannes Kepler University Linz
Institute for Comprehensive Analysis of the Economy (ICAE)

Editor: *Heterodox Economics Newsletter*

www.jakob-kapeller.org | www.uni-due.de | www.heterodoxnews.com

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Open-Minded

ifso institute for socio-economics

Überblick

- Wachstumsraten
  - Wiederholung
  - Wachstumsraten über mehrere Perioden
  - Wachstumsraten und Logarithmus
- Modelle und Mathematik
- Funktionen
  - Differenzieren/Ableiten von Funktionen
- Geometrische Reihen

Wachstumsraten

Berechnung von Wachstumsraten (Wiederholung)

$$\boxed{x_t = \frac{(X_t - X_{t-1})}{X_{t-1}} = \frac{X_t}{X_{t-1}} - 1}$$

- t, t-1: Zeitindizes
- x_t ist die Wachstumsrate von X in der Periode t.
- **Vorsicht:** „relativer Anteil“ vs. „Prozent (%)“ vs. „Prozentpunkte“

- z.B: X wächst von 100 auf 120, d.h. (120/100) - 1 = 0.2
- 0.2 = Anteil des Zuwachses relativ zur Periode (t-1)
- 20% = Wachstum relativ zur Periode (t-1)
- Nächstes Jahr wächst X auf 138, d.h. (138/120) - 1 = 0.15 (15% Wachstum)
- Also ist die Wachstumsrate x um „5 Prozentpunkte“ gefallen.

Berechnung von Wachstumsraten mit mehreren Einflussfaktoren? (Wiederholung)

- Beispiel: Produzierte Gütermenge ($Y^A = Y^A/H * H$)
  - Hängt ab von: Zahl der Arbeitsstunden H und deren Produktivität PR (= Y^A/H)
  - Beschäftigte wachsen um 10%, Produktivität ebenso um 10%, Arbeitszeit/Beschäftigtem bleibt konstant — Was passiert mit Produktion?

$$\overset{+?\%}{\uparrow}\quad \overset{+10\%}{\uparrow}\quad \overset{+10\%}{\uparrow}$$

$$Y^A = Y^A/H * H$$

- Näherungsformel allgemein:
  - $(1 + a)*(1 + b) = 1 + a + b + ab \approx 1 + a + b$
  - wenn die Wachstumsraten a, b eher klein sind, dann können diese addiert werden!
- Näherungsformel Beispiel Produktion:
  - $(1 + 0.1)*(1 + 0.1) = 1 + 0.1 + 0.1 + 0.01 = 1.21 \approx 1.2$

Näherungsformeln (Wiederholung)

Beispiel:

Nominales Wirtschaftswachstum = Reales Wirtschaftswachstum + Inflationsrate

$$\$y \quad = \quad y \quad + \quad \pi$$

Herleitung:

$$\$Y_{t-1}(1+\$y) = (1+y)(1+\pi)\$Y_{t-1}$$

$$\$y = y + \pi + \left(y\pi\,(\approx 0)\right)$$

Berechnung von Wachstumsraten: Mehrere Perioden

$$x_t = \frac{(X_t - X_{t-1})}{X_{t-1}} = \frac{X_t}{X_{t-1}} - 1$$

- *„Wenn ein Wert X von 100 auf 102 steigt, beträgt die Wachstumsrate x (102-100)/ 100 = 2/100 = 0,02 = 2 Prozent."*
- Wachstumrate für eine Periode - was ist bei mehreren Perioden?

- $X_1 = X_0 (1 + x)$
- $X_2 = X_1 (1 + x) = X_0(1 + x) (1 + x) = X_0(1 + x)^2$
- $X_3 = X_2 (1 + x) = X_0(1 + x) (1 + x) (1 + x) = X_0(1 + x)^3$
- $X_t = X_0(1 + x)^t$

Berechnung von Wachstumsraten: Mehrere Perioden

- $X_t = X_0(1 + x)^t$
  - Wie berechnet man X_t gegeben X_0 und x? — Einfach die Zahl der Perioden t einsetzen!
  - Aber wie berechnet man x gegeben X_t und X_0? — Mehrere Möglichkeiten!
- Option 1: Arithmetisches Mittel
  - Alle Wachstumsraten der einzelnen Perioden von 0 bis t errechnen und Durchschnitt bilden.
  - Problem: oft ungenau!
  - Beispiel: 100 € Investment mit 50% Wachstum in Jahr 1 (= 150 €) und 50% Verlust im Jahr 2 (= 75 €). Arithmetisches Mittel = 0, aber das reale Wachstum ist -25%!
  - Ähnliches Problem bei Zinseszins, längeren Wachstumsperioden….
- Option 2: Geometrisches Mittel
  - Präziser, aber etwas komplexer auszurechnen….

Berechnung von Wachstumsraten: Mehrere Perioden

- $X_t = X_0(1 + x)^t$
  - Wie berechnet man X_t gegeben X_0 und x? — Einfach die Zahl der Perioden t einsetzen!
  - Aber wie berechnet man x gegeben X_t und X_0? — Mehrere Möglichkeiten!

- Option 2: Geometrisches Mittel
  - Umformung der obigen Formulierung: $(X_t / X_0)^{1/t} - 1 = x$
  - 1/t als Exponent bedeutet die t-te Wurzel zu ziehen (Potenz und Wurzel als inverse Operationen).
  - Anwendung auf Problem aus voriger Folie: $(75€ / 100€)^{1/2} - 1 = (-13.4\ \%)$.
  - Vereinfachung mittels: $X_t = X_0(1 + x)^t \approx X_0 e^{xt}$ (mit „Eulerscher Zahl" $e \approx 2{,}72$), d.h.
  - $(X_t / X_0)^{1/t} - 1 \approx \ln(X_t / X_0) / t = (\ln X_t - \ln X_0) / t = x$
  - Ergo: $(\ln X_{t+1} - \ln X_t)$ als Wachstumsrate, z.B. bei $0.01 \approx 1\%$ Wachstum (nützlich für Graphen!)

	Reales BIP zu Preisen von 2010	Index, 1991=100	Index, 2000=100	Index, 2014=100	Reales BIP-Wachstum
2000	2355.4	115.6	100.0	86.5	0.030
2001	2395.4	117.6	101.7	87.9	0.017
2002	2395.6	117.6	101.7	87.9	0.000
2003	2378.4	116.7	101.0	87.3	-0.007
2004	2406.4	118.1	102.2	88.3	0.012
2005	2423.5	118.9	102.9	88.9	0.007
2006	2513.4	123.4	106.7	92.2	0.037
2007	2595.5	127.4	110.2	95.3	0.033
2008	2622.9	128.7	111.4	96.3	0.011
2009	2475.0	121.5	105.1	90.8	-0.056
2010	2576.2	126.4	109.4	94.6	0.041
2011	2668.7	131.0	113.3	97.9	0.036
2012	2678.8	131.5	113.7	98.3	0.004
2013	2681.6	131.6	113.8	98.4	0.001
2014	2724.6	133.7	115.7	100.0	0.016
Durchschnittliches BIP-Wachstum (geometrisches Mittel)	**0.0105**				
Durchschnittliches BIP-Wachstum (arithmetisches Mittel)					**0.0120**

Zur Intuition des Logarithmus (nur für Interessierte!)

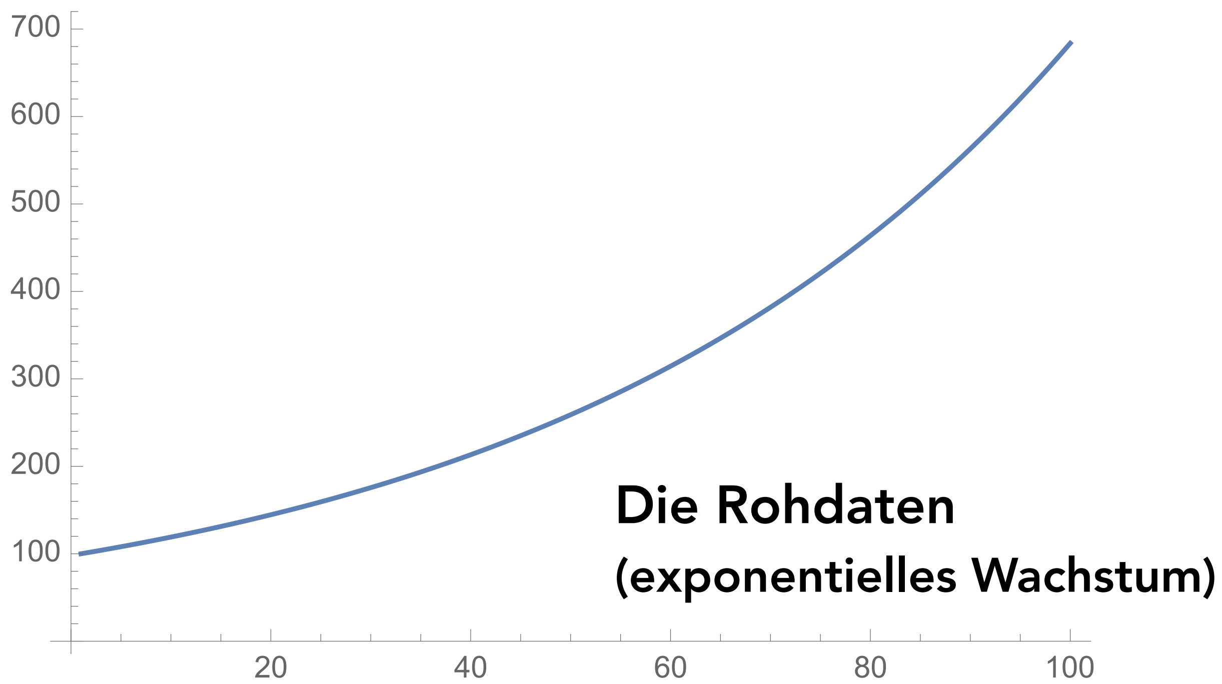
Was ist die Interpretation von „e“ und „ln“?

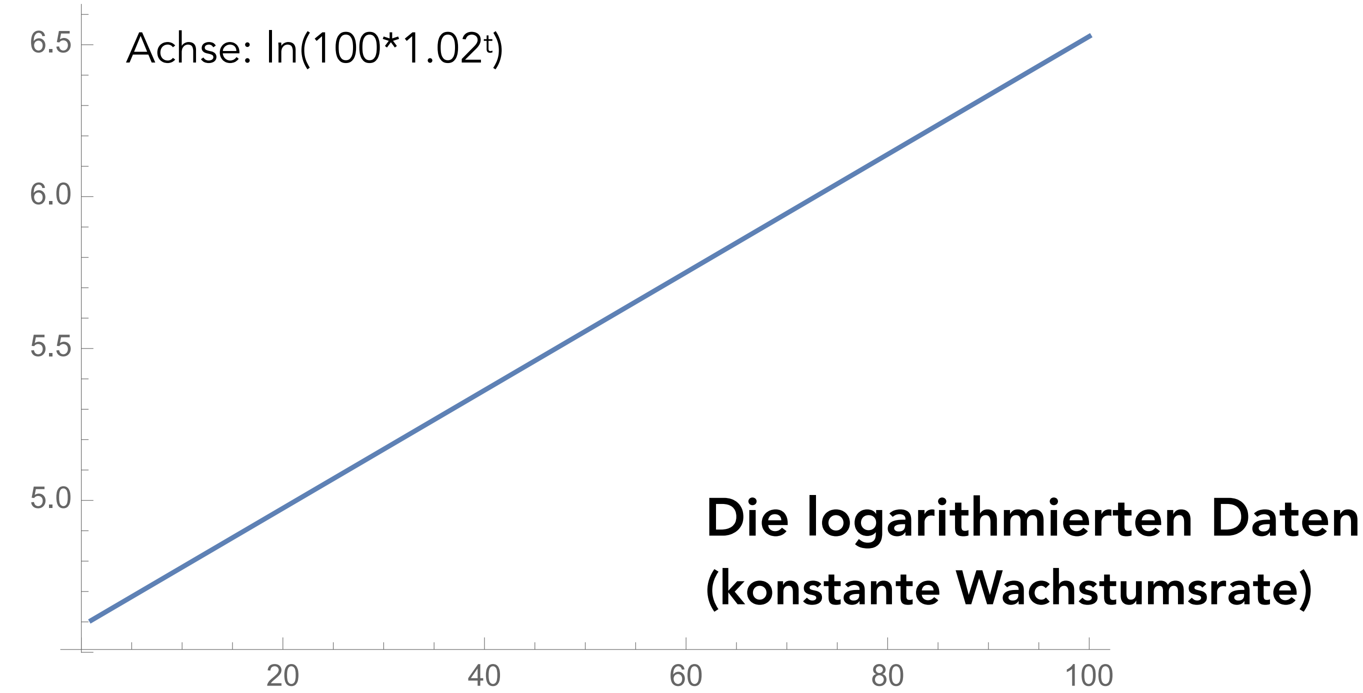
- Für die Eulersche Zahl e gilt: $\lim_{n\to\infty}(1+r/n)^n = e^r,$
  n…Zahl der Perioden
  r… Summe der Wachstumsraten über alle Perioden
  - **Beispiel:** 4 Jahre mit 2% Wachstum, bedeutet dass n = 4 und r = 8%
  - e^r hier entspricht also e^{xt} aus vorangegangener Folie (Summe der Wachstumsraten!)
  - **Vorteil:** Näherungsweise Berücksichtigung von Zinseszins-Effekten: $e^{0.02*4} = 1.0833$
  - Natürlicher Logarithmus als inverse Operation zu $e^r = z$:
    - allgemein: ln(z) ergibt r — *„Mit welcher Zahl muss man e potenzieren um z zu erhalten?“*
    - $X_t / X_0 = e^{xt} \rightarrow \ln(X_t / X_0) = \ln(e^{xt}) = xt \rightarrow \ln(X_t) - \ln(X_0) / t = x$
- **Aber:** Eulersche Zahl beschreibt kontinuierliches Wachstum - trifft unseren Fall nicht ganz.
  - Beispiel: $1.02^4 = 1.0824 \neq 1.0833 = e^{0.02*4}$ (Annäherung mit e nur näherungsweise!)
  - *Aus welchen Gründen ist der Logarithmus sonst noch attraktiv?*
  - **Antwort:** Weil die logarithmierten Werte in Graphen gut interpretiert werden können.
  - $\ln(X_{t+1}) - \ln(X_t) = \ln(e^x) = x \rightarrow$ Differenz von 0.01, bedeutet eine 1%ige Änderung.

Zeitreihen und Logarithmus

Ein einfaches Beispiel

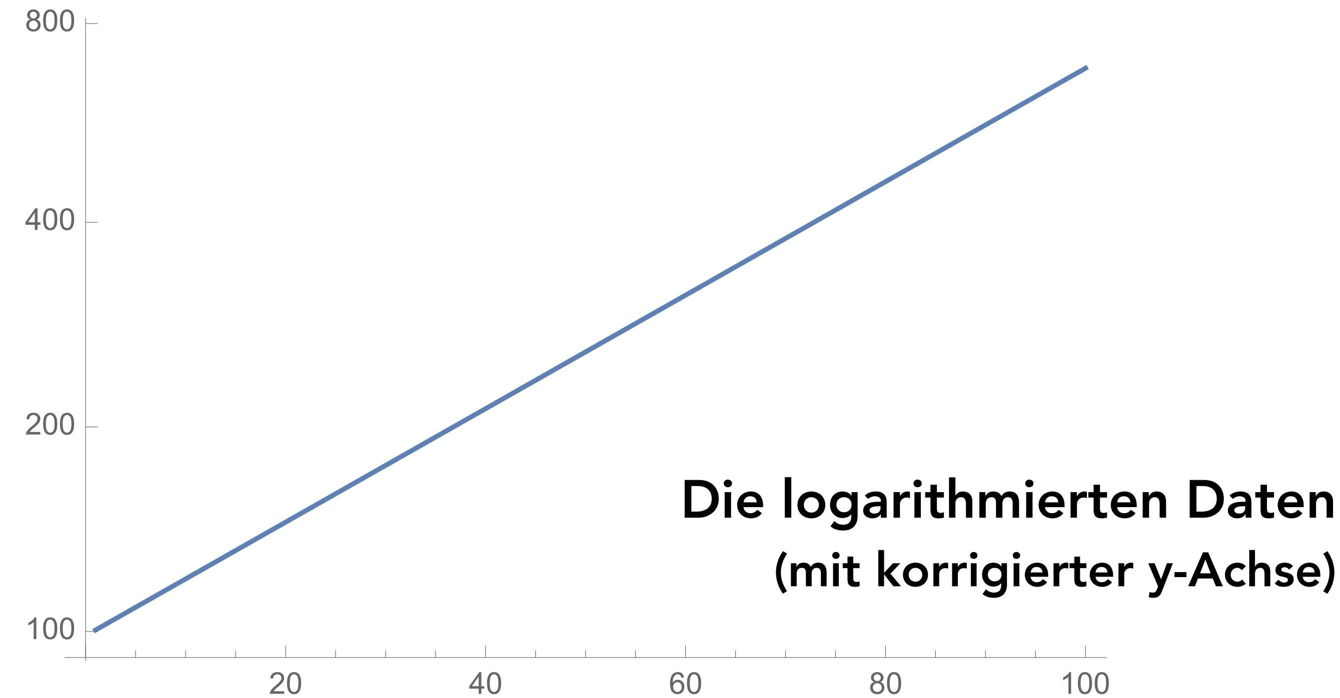
- Eine Größe wächst mit 2% pro Periode für 100 Perioden (Startwert = 100).



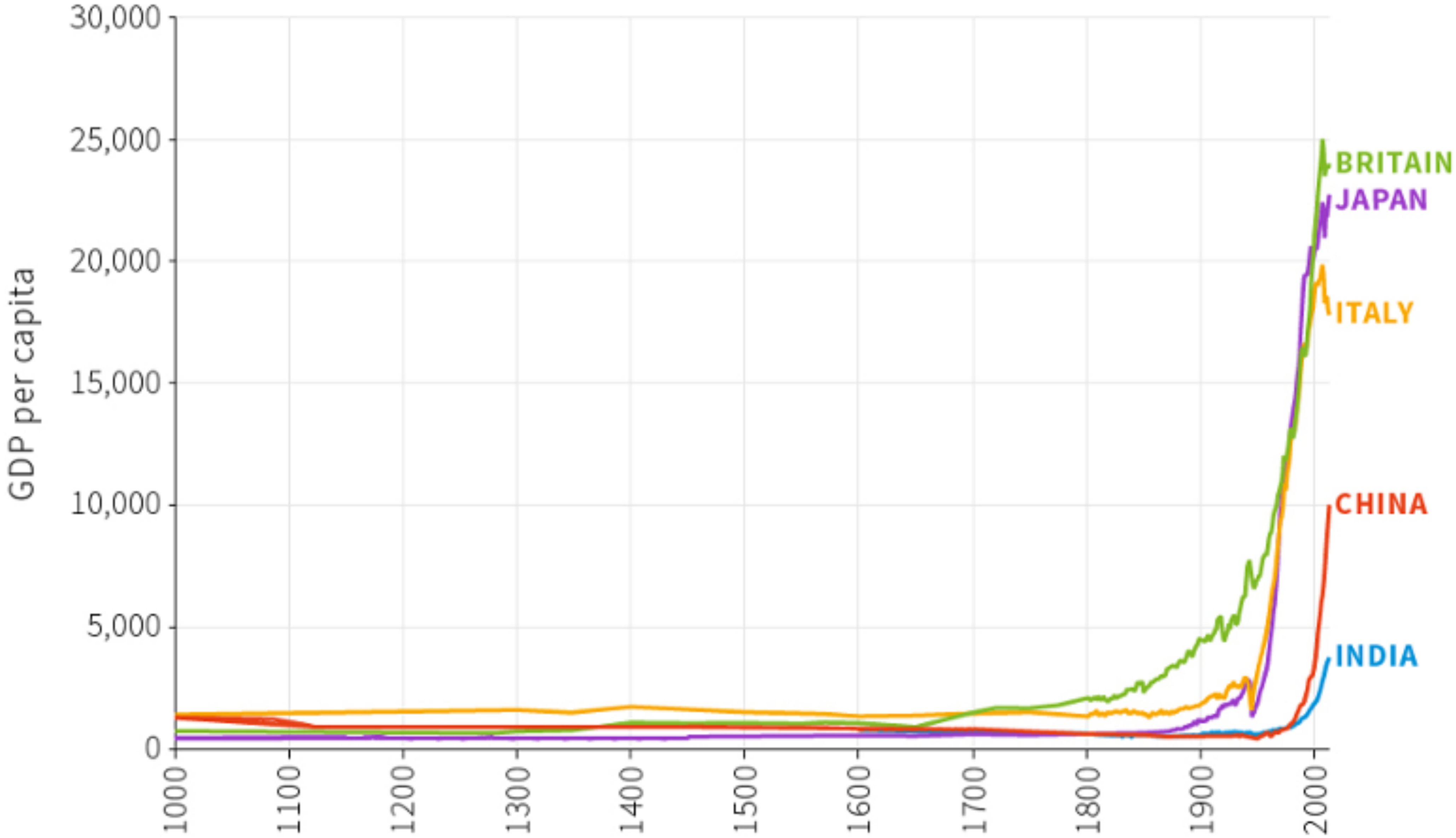


Ergo: Die Steigung der Kurve der logarithmierten Werte zeigt genau die relative Änderung an! (rechts oben)

In absoluten Zahlen bedeutet dies das Wachstum jede Runde ansteigt („Zineszins“; links oben & rechts unten)



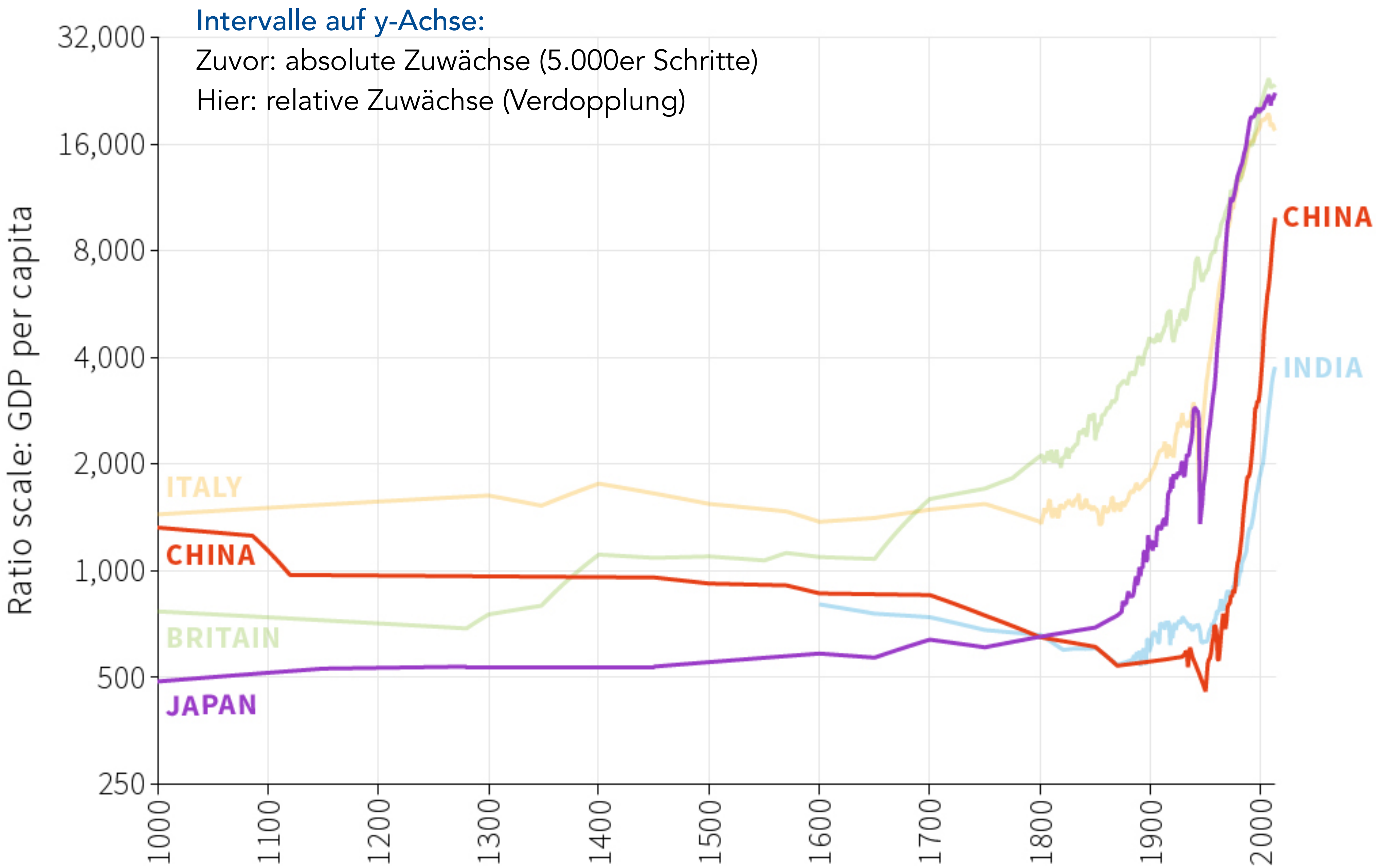
Zeitreihen und Logarithmus
Wirtschaftswachstum historisch



Quelle: www.core-econ.org

Zeitreihen und Logarithmus

Wirtschaftswachstum historisch (logarithmiert)



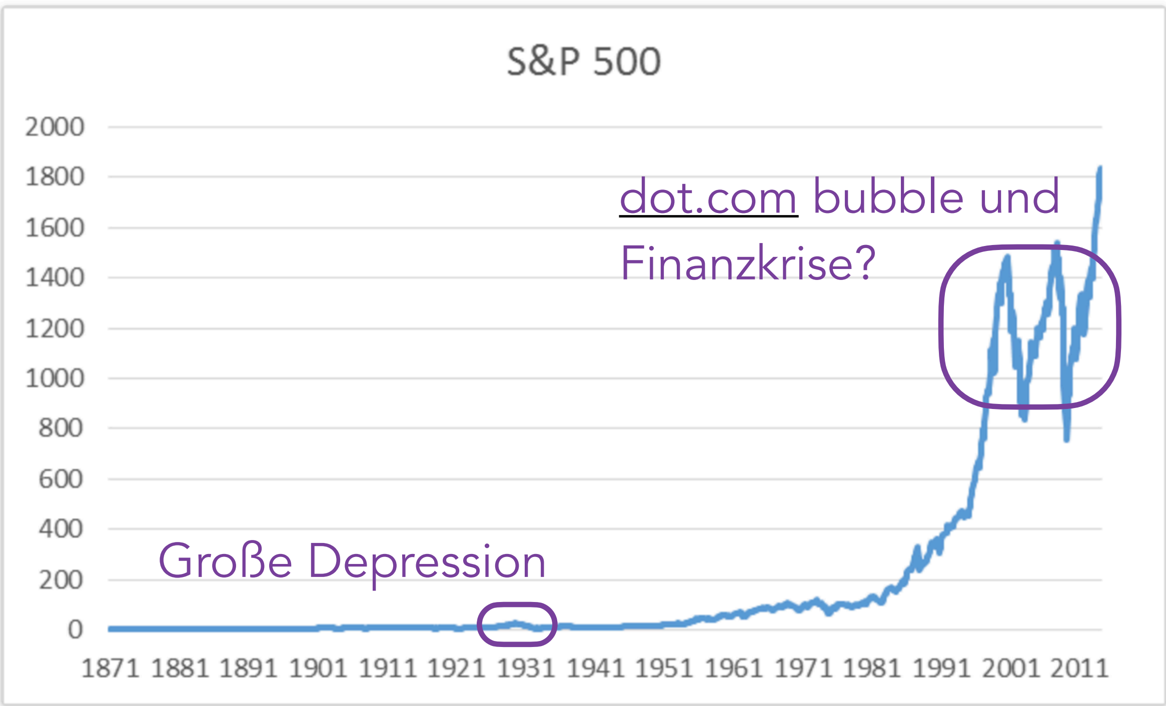
Vorteile?

- Phasen mit raschem Wachstum besser erkennbar
- Unterschiede zwischen Ländern klarer ersichtlich
- Darstellung weniger dominiert durch Endpunkt

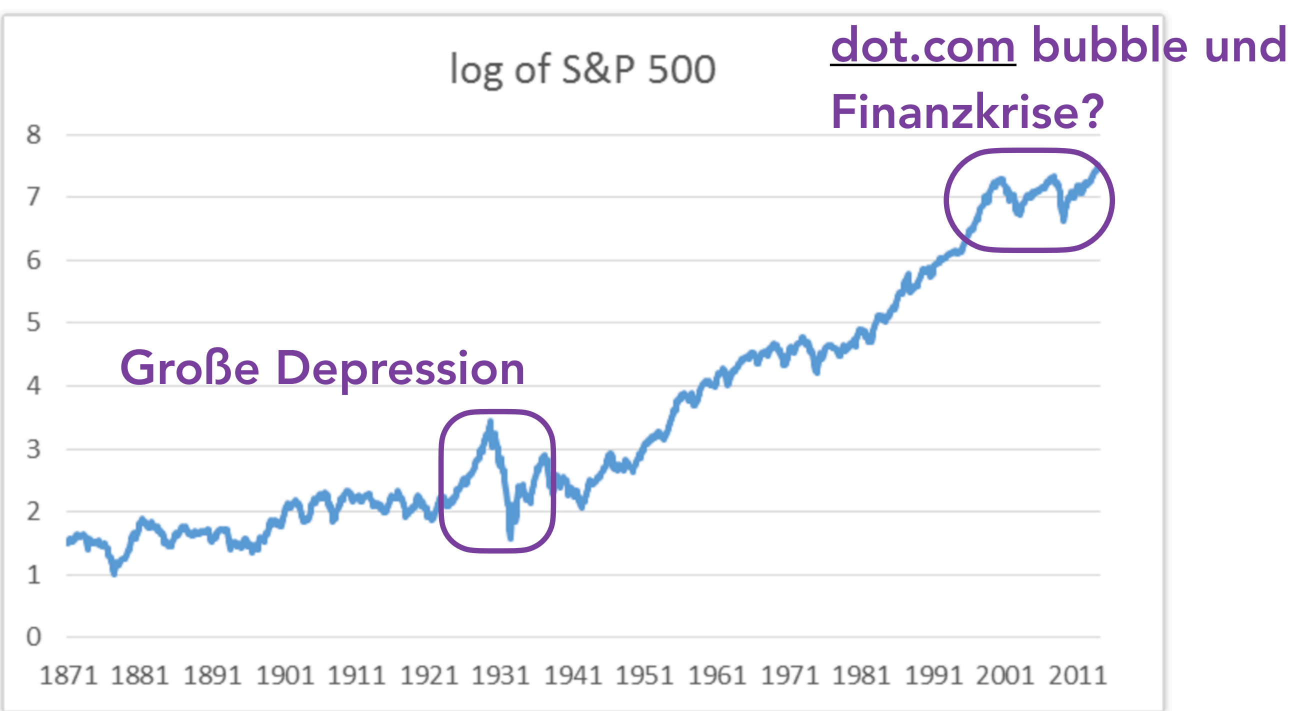
Quelle: www.core-econ.org

Zeitreihen und Logarithmus

Beispiel: S&P 500 - Rohdaten logarithmierte Daten



S&P 500 stock price index, 1871:M1 – 2014:M2. Data source: Robert Shiller.



Natural log of U.S. stock prices.

http://econbrowser.com/archives/2014/02/use-of-logarithms-in-economics

Modelle und Mathematik

Gleichungen und Modelle

- Mathematische ökonomische Modelle bestehen aus Gleichungen
  - Gleichungen haben unterschiedliche Interpretationen - nicht erkennbar an der mathematischen Formulierung
  - **Identitätsgleichungen:** Definitionen, notwendig wahre Zusammenhänge, theoretisch (weitgehend) unumstritten, z.B. $Y^N = C + I + G + X - M$
  - **Verhaltensgleichungen:** theoretisch umstrittene Zusammenhänge, basierend auf Annahmen, z.B. $C = a + bY$
  - **Gleichgewichtsbedingungen:** manche Modelle erfordern ein Gleichgewicht, z.B. Angebot = Nachfrage ($Y^A=Y^N$)
- Für gegebene Annahmen folgen bestimmte Schlussfolgerungen deduktiv durch Anwendung mathematischer Methoden

Zeichen in Gleichungen und Modellen

- Variablen, Konstanten und Koeffizienten
  - Eine Variable (Veränderliche) kann verschiedene Werte annehmen und sich im Laufe der Zeit verändern, z.B. Y, C, I, G, X, M, Y^{HH}, Y^{F}, Y^{St},…
  - Eine Konstante ist eine fixierte Variable, z.B. a = 3 in C = a + bY
  - Ein Koeffizient ist eine Zahl, die in Zusammenhang mit einer Variable geschrieben wird, z.B. b=0.8 in C = a + bY - ein Koeffizient kann als konstant oder variabel angenommen werden.

- „Endogene" und „exogene" Variablen
  - Exogene Variablen gehen „von außen" in das Modell ein, werden nicht im Modell erklärt und nicht von anderen Variablen im Modell beeinflusst, z.B. I = I.
  - Endogene Variablen werden im Modell (modellendogen) erklärt, weil sie von anderen Variablen des Modells beeinflusst werden, z.B. C = a + bY.

Die Struktur des einfachen keynesianischen Modells

• $Y^N = C + I$	Identität (für geschl. VW ohne Staat!)
• $C = a + bY$	Verhaltensgleichung
• a	Unabhängige (exogene) Variable
• b	Parameter/Koeffizient
• C	abhängige Variable
• Y	abhängige Variable
• $I = I$	Verhaltensgleichung
• I	Unabhängige (exogene) Variable
• $Y = Y^N = Y^A$	Gleichgewichtsbedingung
• $Y^* = (a + I)/(1 - b)$	Gleichgewichtslösung

Funktionen

Funktionen

Funktionen mit einer unabhängigen Variable:

$$\boxed{y = f(x)}$$

y… „abhängige Variable", „Funktionswert", „endogene Variable"

x… „unabh. Variable", „erklärende Variable", „Argumentwert", „exogene Variable"

$$\boxed{y = \underset{(+)}{f(x)}}$$

Positiver Zusammenhang

$$\boxed{\frac{dy}{dx} > 0}$$

$$\boxed{y = \underset{(-)}{f(x)}}$$

Negativer Zusammenhang

$$\boxed{\frac{dy}{dx} < 0}$$

Funktionen

- Wenn wir argumentieren, dass der Konsum eine Funktion des Einkommens ist, so können wir schreiben…

$$\boxed{Konsum = f(Einkommen)}$$

- Bezeichnen wir Konsum mit C und Einkommen mit Y, so wird daraus

$$\boxed{C = f(Y)}$$

bzw. kann man auch schreiben

$$\boxed{C = \underset{(+)}{C(Y)}}$$

- Das „+“ unter dem Y bedeutet, dass mit höherem Einkommen der Konsum zunimmt (C ist eine positive Funktion von Y).

Funktionen

Beispiel:

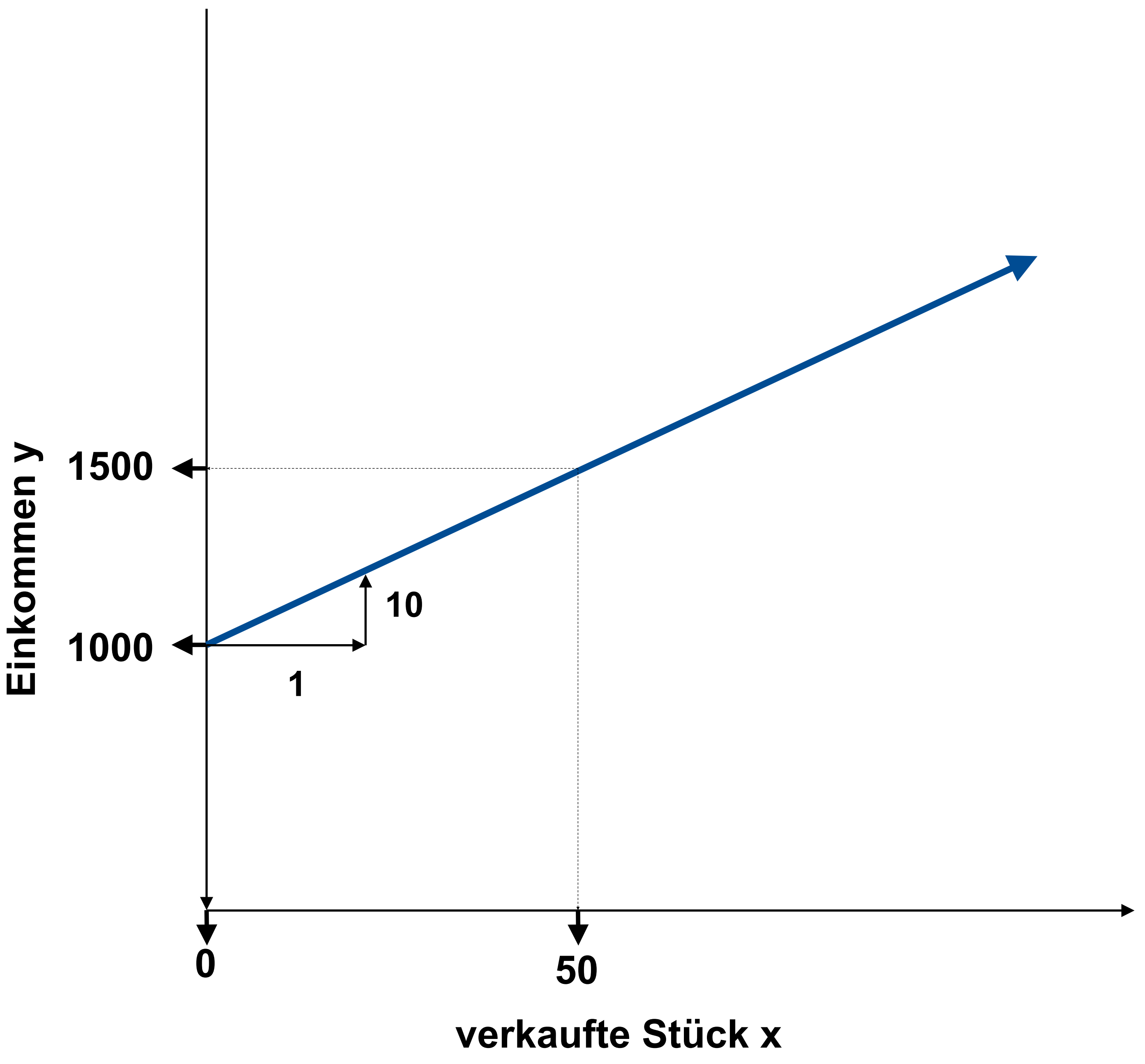
Fixeinkommen + Prämie

1. Bei 0 Verkäufen beträgt das Einkommen 1000€.

2. Bei 50 Verkäufen beträgt sein Einkommen 1500€

3. Steigung (m): (500 €/ 50 Verkäufe)

$$\boxed{k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10}{1} = 10}$$



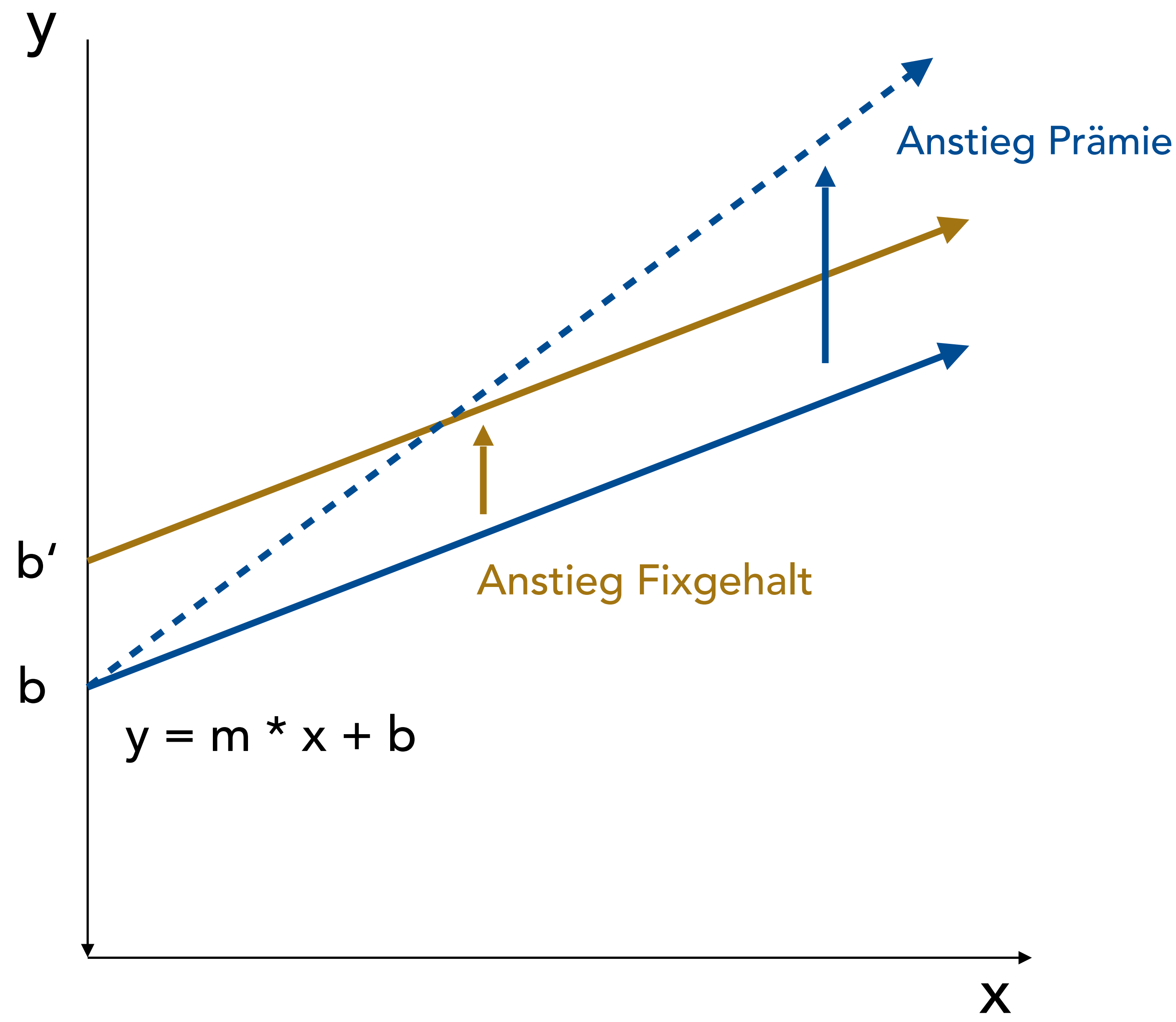
Funktionen

- Allgemeine Schreibweise:
  y = m * x + b
    m…Steigung
    b…Konstante

- In unserem Fall:
  y = 10 * x + 1000

- Wie verändert sich das Bild, wenn sich das fixe Gehalt erhöht?
  - Konstante (b) wird größer; Parallelverschiebung nach oben

- Was passiert, wenn die Verkaufsprämie steigt?
  - Steigung (m) wir größer



Differenzieren / Ableiten von Funktionen

Warum Differenzialrechnung?

- In der Mikroökonomik geht es oft um „optimale" Lösungen im Sinne des Kosten-Nutzen-Kalküls rationaler Wirtschaftssubjekte
  - z.B.: Bei welcher Produktionsmenge wird der Gewinn des Unternehmens maximiert?
- In der Makroökonomik fragen wir häufig nach Ursache-Wirkung-Zusammenhängen
  - z.B. Wie verändert sich das Bruttoinlandsprodukt, wenn der Staat seine Ausgaben um x Einheiten erhöht?

Warum Differenzialrechnung?

> "Refusing to deal with numbers rarely serves the interest of the least well-off."

Piketty, 2014

Euler vs. Diderot (1773)

Differenzieren

y = f(x): Möchte man wissen, wie y auf eine Veränderung von x reagiert, so bildet man die erste Ableitung. Hierfür gibt es verschiedene Schreibweisen:

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial f(x)}{\partial x}, f'(x)$$

Die Veränderung in y („Δy“) nach einer bestimmten Veränderung in x („Δx“) ergibt sich folgendermaßen (näherungsweise!):

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x} * \Delta x$$

Drei wesentliche Ableitungsregeln (Koeffizienten — k, Konstante — d, Potenz — n):

$$y = k * x^n + d \rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = k * (n * x^{n-1})$$

Differenzieren

- **Beispiel:** Veränderung des Gleichgewichtseinkommens
  - Staatsausgaben G werden um 100 erhöht

$$Y = \frac{1}{1-c_1}(c_0 + I + G)$$

Ausgangssituation:
c_0…autonomer Konsum = 100
c_1…marginale Konsumquote = 0,6
Y…Gleichgewichtseinkommen
I…Investitionen = 200
G…Staatsausgaben = 200
(Y = 1250)

- Lösung?

Differenzieren

- Zwei Möglichkeiten:
  1. Einsetzen:

     Vor der Änderung: Y = 1250

     Nach der Änderung: Y = 1500

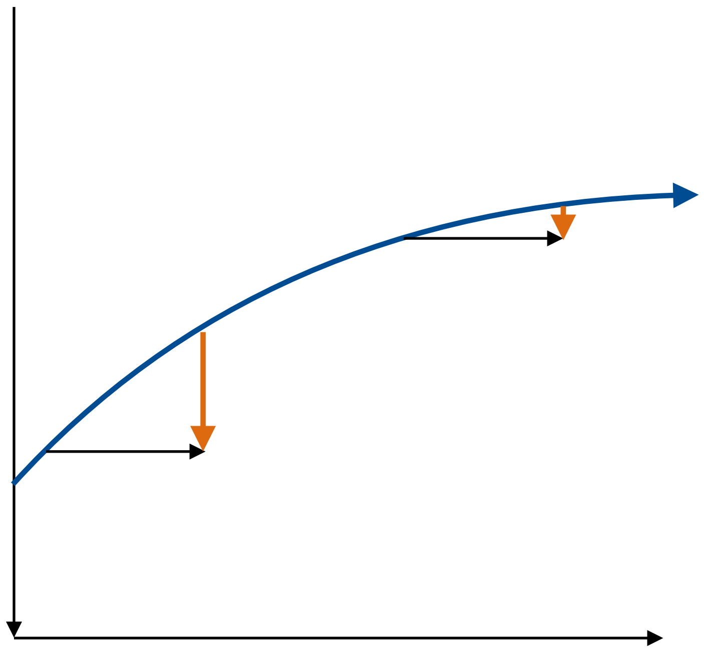
     $\Delta Y = 250$
  2. Differential:

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{1 - c_1} = 2,5$$

$$\Delta Y = 2,5 * \Delta G = 2,5 * 100 = 250$$

Beispiel: zweite Ableitung

- $C = 500 + 0.5Y^{0.5}$
- $C'(Y) = \frac{dC}{dY} = C_Y = 0.25Y^{-0.5}$
- $C''(Y) = \frac{d^2C}{dY^2} = C_{YY} = -0.125Y^{-1.5}$



Die erste Ableitung beantwortet die Frage: Um wie viel erhöht sich der Konsum, wenn sich das Einkommen minimal ändert?

Die zweite Ableitung zeigt die Änderung 2. Ordnung („Änderung der Änderung“). Wenn diese für alle realistischen Werte von Y negativ ist (was hier der Fall ist), verläuft die Konsumfunktion *konkav*, d.h. die Steigung von C (die erste Ableitung) wird immer kleiner, je größer Y wird.

Lokale Extremwerte: Definition

- Die Funktion $F = F(X)$ weist ein lokales Maximum auf für
  - $F'(X) = 0$ (notwendige Bedingung)
  - $F''(X) < 0$ (hinreichende Bedingung)
- Die Funktion $F = F(X)$ weist ein lokales Minimum auf für
  - $F'(X) = 0$ (notwendige Bedingung)
  - $F''(X) > 0$ (hinreichende Bedingung)

Funktionen: Mehrere Variablen

Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen:

$$y = f\underset{(+)}{(x_1}, \underset{(-)}{x_2})$$

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial x_1} > 0,} \quad \boxed{\frac{\partial y}{\partial x_2} < 0}$$

… partielle Einflüsse

$\boxed{\partial y / \partial x_1 :}$ Gibt an, wie sich eine Veränderung von x_1, <u>ceteris paribus</u>, auf y auswirkt.

„Ceteris paribus" bedeutet alles andere (in diesem Fall x_2) bleibt konstant

Totales Differential

$y=f(x_1,x_2)$: Wie wirkt sich eine gleichzeitige Änderung von x_1 und x_2 auf y aus?

Totales Differential: $$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} * \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} * \Delta x_2$$

Beispiel: Eine Firma produziert zwei Güter. Wie verändert sich der Erlös, wenn die verkaufte Anzahl von Gut 1 (q_1) um 10 und die Anzahl von Gut 2 (q_2) um 3 Stück steigt?

$$R = R(q_1, q_2) = p_1 * q_1 + p_2 * q_2$$

Lösungsweg 1: Ursprünglichen Erlös berechnen, dann den neuen Erlös berechnen und dann die Differenz bilden.

Lösungsweg 2: Lösung mit Hilfe des totalen Differentials:

$$\Delta R = \frac{\partial R}{\partial q_1} * \Delta q_1 + \frac{\partial R}{\partial q_2} * \Delta q_2 = p_1 * \Delta q_1 + p_2 * \Delta q_2$$

Beispiel: Investitionsfunktionen

- Einfache Investitionsfunktion
  - z.B.: $I = I(i,Y) = a + bY — ci$ (Investitionen hängen von Output und Zins ab)
  - Zwei partielle Ableitungen: $dI/dY = b$ und $dI/di = (-c)$
  - Totales Differential: $dI = dI/dY * dY + dI/di * di = b*dY — c*di$

- Kompliziertere Investitionsfunktion
  - z.B. $I = I(i,Y) = a*(Y^b/i^c)$
  - Zwei partielle Ableitungen: $dI/dY = ab/(Y^{1-b}*i^c)$ und $dI/di = (-ac)*(Y^b/i^{1+c})$
  - Totales Differential: $dI = dI/dY * dY + dI/di * di = ab/(Y^{1-b}*i^c)*dY — ac*(Y^b/i^{1+c})*di$

Geometrische Reihe

Geometrische Reihen

Es gilt folgendes:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

F: Wenn x < 1 ist und n gegen unendlich geht?

A: Dann geht x^{n+1} gegen 0 und die Summer dieser geometrischen Reihe ist gleich 1/(1-x):

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} \qquad \text{für } x < 1$$

Geometrische Reihen

- Anwendbar auf Multiplikatorprozess (zB bei ΔG)

  3. Möglichkeit zur Berechnung des Multiplikators (neben Einsetzen und Ableiten)

$$\Delta Y = \Delta G + c_1 \Delta G + c_1^{\,2} \Delta G + \ldots + c_1^{\,n} \Delta G + \ldots =$$

$$= \Delta G * (1 + c_1 + c_1^{\,2} + \ldots + c_1^{\,n} + \ldots) =$$

$$= \Delta G \frac{1}{1 - c_1}$$

ΔY… Veränderung des Gleichgewichtseinkommen

ΔG… Veränderung der Staatsausgaben

c_1… marginale Konsumneigung

Wiederholungsfragen zum Selbststudium

Wiederholungsfragen zum Selbststudium

- Was ist der zentrale Unterschied zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel einer Wachstumsrate? Welche der beiden Berechnungsweise gibt eher ein akkurates und präzises Bild der Situation?

- Mit welchen zwei Formeln können Sie die durchschnittliche geometrische Wachstumsrate einer Reihe berechnen?

- Welche wertvolle Eigenschaft hat der Logarithmus in diesem Kontext? Wie bildet sich diese Eigenschaften in Zeitreihendarstellungen ab und welcher mögliche Vorteil geht damit einher?

Wiederholungsfragen zum Selbststudium

- Welche drei Formen von Gleichungen in ökonomischen Modellen werden typischerweise unterschieden?
- Welche drei Rechenmethoden stehen uns zur Verfügung um den Effekt einer Änderung der Staatsausgaben auf das BIP (im Rahmen des einfachen keynesianischen Modells) zu berechnen?
- Wie ist bei der Ableitung von potenzierten Größen genau vorzugehen?